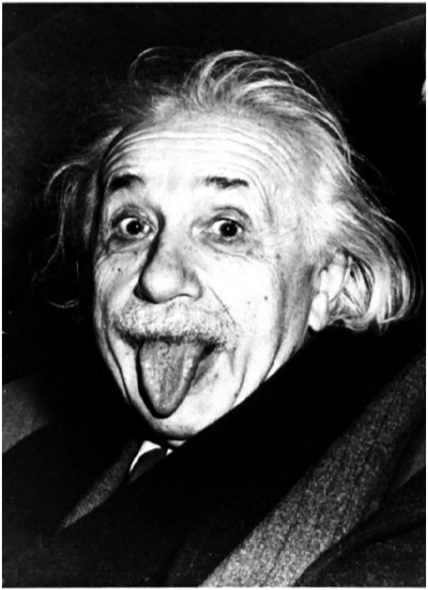
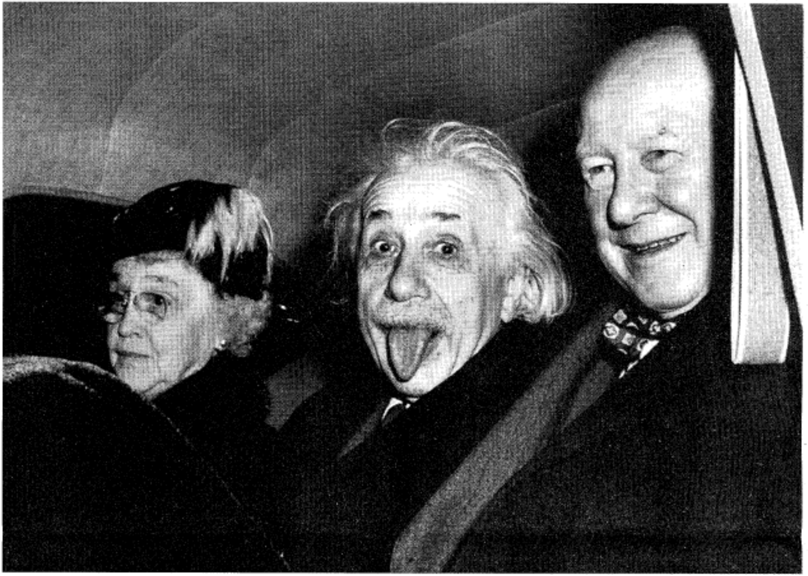
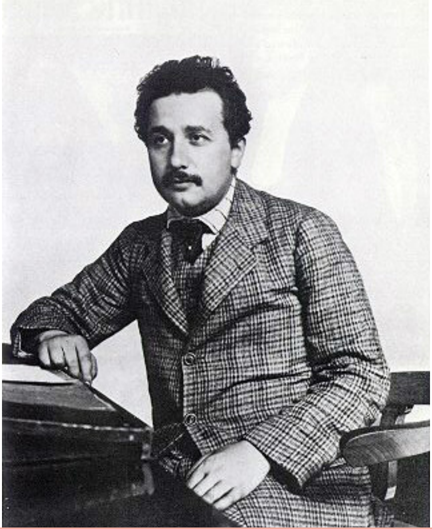
Von der Brownschen Bewegung ...
zur Dynamik biologischer und sozialer Gruppen

Frank Schweitzer
(fschweitzer@ethz.ch)





Einstein 1905



Annus Mirabilis 1905

30. April 1905: Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen
Dissertation an der Universität Zürich

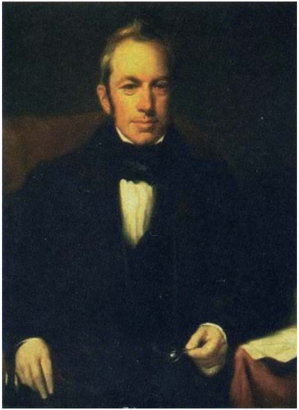
9. Juni 1905: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt
Annalen der Physik und Chemie, IV. Folge, Band 17 (1905) S. 132-148

30. Juni 1905: Zur Elektrodynamik bewegter Körper
Annalen der Physik und Chemie, IV. Folge, Band 17 (1905) S. 891-921

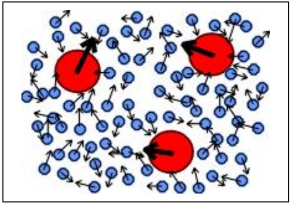
18. Juli 1905: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderten Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen
Annalen der Physik und Chemie, IV. Folge, Band 17 (1905) S. 549-560

27. September 1905: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?
Annalen der Physik und Chemie, IV. Folge, Band 18 (1905) S. 639-641

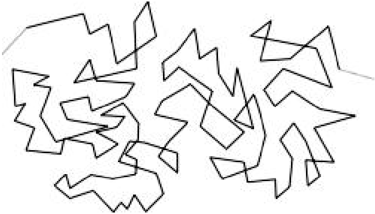
Brownsche Bewegung



Der Botaniker Robert Brown (1773-1858)



Fu-Kwun Hwang, http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/



Annalen der Physik und Chemie, IV. Folge, Band 17 (1905) S. 549-560

5. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Einsteins Beitrag

- Theorie für den experimentellen Nachweis der *Atomhypothese* $\Rightarrow$ Perrin (1908/NP 1926)
- Verbindung von Diffusion (D) und Viskosität (η) / Thermodynamik (kinetische Wärmetheorie) und Hydrodynamik

$$D = \frac{k_B T}{m\gamma} = \frac{R_0\, T}{N_A} \frac{1}{6\pi\eta\, r}$$

  - Bestimmung von $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}/\mathrm{mol}$ durch Messung makroskopischer Größen

- Verbindung von *makroskopischer* Ebene (Vielteilcheneffekt) und *mikroskopischer* Ebene (Einteilcheneffekt)

$$\left\langle \Delta R^2(t) \right\rangle = 2D\, d\, t$$

  - statistische Beschreibung von Fluktuationen

Alternative Beschreibungen

Marian von Smoluchowski (1872-1917)
Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. Annalen der Physik, Band 21 (1906) 756–780

Paul Langevin (1872-1946)

On the Theory of Brownian Motion, Comptes rendus de l'Académie des sciences (Paris) 146 (1908) 530-533

Die Langevin-Gleichung

- Idee: Stöße der umgebenden Moleküle werden in einer Zufallskraft zusammengefaßt

$$S = \gamma \frac{k_B\,T}{m} \quad (\mathrm{Fluktuations-Dissipations-Theorem})$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}(t) \rangle = 0\;; \quad \left\langle \boldsymbol{\xi}_i(t) \boldsymbol{\xi}_j(t') \right\rangle = \delta_{ij}\,\delta(t-t')$$

- stochastische Gleichung für Brownsches Teilchen i

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\;; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\mathbf{v} + \sqrt{2\,S}\,\boldsymbol{\xi}(t)$$

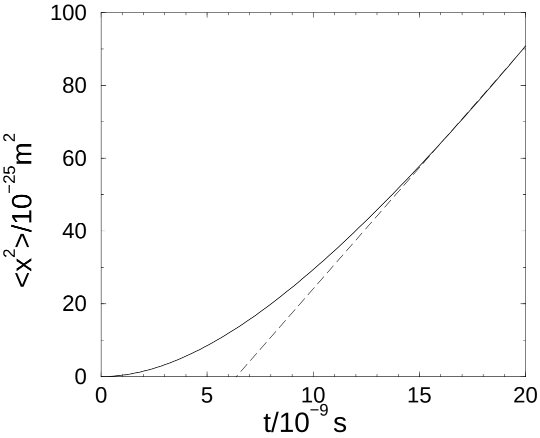
- Vorteile
  - explizite Einteilchen-Dynamik anstelle von Wkts.aussagen
  - Fluktuationsstärke $S \Leftrightarrow$ Diffusionskonstante D

Prototyp biologischer Bewegung?

- 19. Jh: Brownsche Bewegung als Eigenschaft “lebender” Materie
- Random-Walk-Theorie für Migration von Mosquitos (Pearson, 1906)
- Problem der Persistenz
  - Fürth (Z. Physik 1920): *Die Brownsche Bewegung bei Berücksichtigung der Persistenz der Bewegungsrichtung. Mit Anwendungen auf die Bewegung lebender Infusorien*

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = a\,t + b(c^t - 1) \qquad c < 1$$

  - Ein-Schritt-Gedächtnis $\Rightarrow$ gleiche Fokker-Planck-Gleichung


100
80
60
40
20
0
0
5
10
15
20
<x²>/10⁻²⁵m²
t/10⁻⁹ s

Aktive vs. passive Bewegung

- passive Bewegung
  - *ungerichtet:* getrieben durch thermisches Rauschen
  - *gerichtet:* getrieben durch äußere Kräfte, Strömungen, Gradienten
- aktive Bewegung $v_0^2 \gg \frac{d}{2m} k_B T$
  - benötigt Energiezufuhr
    Mechanismen der Energieaufnahme, -speicherung, -transformation, Dissipation (Nichtgleichgewicht)
- Übergang zur biologischen Bewegung:
  - Berücksichtigung von *energetischen* und *stochastischen* Aspekten
  - deterministische Einflüsse (z.B. Richtung), kollektive Wechselwirkung mit anderen Individuen

Einfluß eines inneren Energiedepots

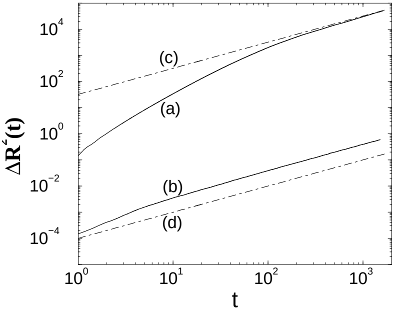
$$\frac{de}{dt} = s(\mathbf{r},t) - c\,e - d(\mathbf{v})\,e(t)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\left(\gamma_0 - \frac{s_0\,d_2}{c + d_2 v^2}\right)\mathbf{v} + \sqrt{2S}\,\xi(t)$$

Aktives Brownsches Teilchen

$$\Delta R^2(t) = 4D_r t$$

$$D_r^{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2S}\left(\frac{s_0}{\gamma_0} - \frac{c}{d_2}\right)^2$$



Brownsche Agenten

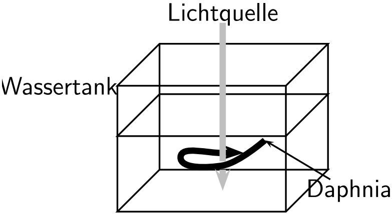
- Prinzip der Kausalität

Wirkungen	$\Longleftarrow$	**Ursachen**
Änderungen von u_i		deterministische + stochastische Einflüsse
$\dfrac{du_i}{dt}$	$=$	$f_i(\underline{u}, \underline{\sigma}, t) + \sqrt{2\varepsilon_i}\, \xi_i(t)$

- $f_i(\underline{u}, \underline{\sigma}, t)$: Berücksichtigung von
  - nichtlinearen Wechselwirkungen mit anderen Agenten $j \in N$
  - energetischen Bedingungen, Umweltressourcen
  - Zeitabhängigkeiten (Tag/Nacht, saisonale Zyklen)
- ε_i: zustandsabhängiges (individuelles) Rauschen
  Berücksichtigung "anderer" Einflüsse (Separation von Zeit/Raumskalen)

Schwarmbewegung von Daphnia

Picture courtesy of Stephen Durr



Eine Daphnia *Viele Daphnia*

Videos: Courtesy of Anke Ordemann, *Center for Neurodynamics, University of Missouri, St. Louis*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_i = -\gamma_0\,\mathbf{v}_i - a\mathbf{r}_i + d_2 e(t)\mathbf{v}_i + \sum_{i\neq j}\mathbf{f}_{ij} + \sqrt{2S}\xi(t)$$

Reibung Ext.Potential Aktive Bewegung Fluktuationen

- $f_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ durch asymmetrisches Ausweichpotential

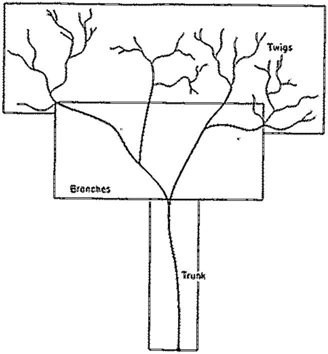
$\boxed{\text{Simulation}}$

F Schweitzer *et al.*, http://intern.sg.ethz.ch/publications/2005/web-ms.html

- Resultat: kollektive Schwarmbewegung als Kompromiß
- Rolle der Fluktuationen: Symmetriebruch bei der Rotationsrichtung

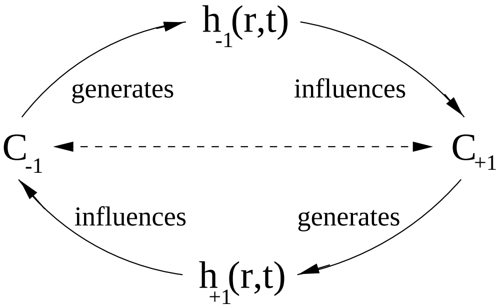
Chemische Kommunikation

- Brownsche Agenten “schreiben” und “lesen” chemische Information



Hölldobler, B. and Möglich, M.: The foraging system of *Pheidole militicida (Hymenoptera: Formicidae)*, *Insectes Sociaux* **27/3** (1980) 237-264

Kommunizierende Brownsche Agenten



Simulation

F. Schweitzer *et al.*, http://intern.sg.ethz.ch/fschweitzer/until2005/ants.html

- Rolle der Fluktuationen:
  - Erkundung der Umgebung ("Futter" durch Zufall gefunden)
  - Anpassung der Wege an die Veränderungen

Bewegung von Menschenmassen

- Langevin-Dynamik des *Brownschen Agenten i*

$$\frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_i}\mathbf{v}_i(t) + \mathbf{f}_i(t) + \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_i}{\tau_i}}\,\boldsymbol{\xi}_i(t)$$

- "social force"- Modell

$$\mathbf{f}_i(t) = \frac{1}{\tau_i}v_i^0\mathbf{e}_i - \nabla\mathbf{r}_i\left[V_B(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_B^i|) + V_{\mathrm{int}}(\mathbf{r}_i, t)\right]$$

- Resultat: selbstorganisiertes "Verhalten"

Simulation: Bewegung auf dem Korridor

D. Helbing *et al.*, http://rcswww.urz.tu-dresden.de/~helbing/

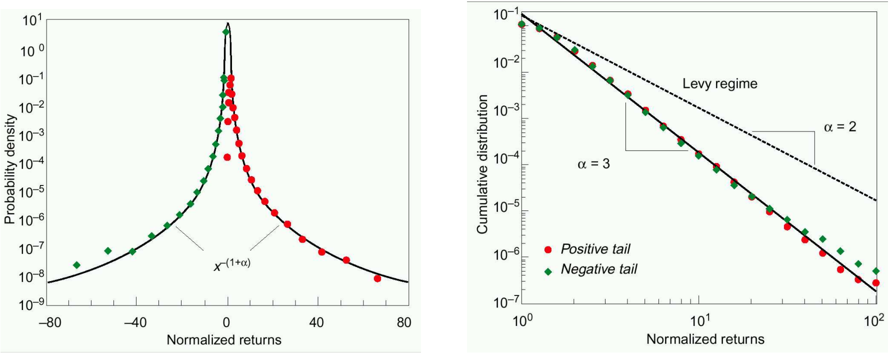
Praktische Anwendung:

- Optimierung von Einkaufszentren, Bahn/Flughäfen, ...
- Modellierung von Panik (Helbing, Schreckenberg)
  $\Rightarrow$ Evakuierungsszenarien
- Simulation: Keine Panik Panik I. Farkas *et al.*, http://angel.elte.hu/panic/

Börsenkurse als Zufallsprozess

- Louis Bachelier: *Théorie de la spéculation* (1900)
  - Doktorarbeit bei Henri Poincaré
  - mathematische Theorie: Wiener-Prozess $\Leftrightarrow$ Diffusion

- "log returns": $r_\tau(t) = \log\{p(t+\tau)/p(t)\}$
  - Fluktuationen auf kurzen Zeitskalen ($\tau <$ Monat) sind nicht normalverteilt, Power Law: $f(r) \sim \langle r \rangle^{-\alpha}$, $\alpha \approx 3$



Normalized log-returns r_τ of 1.000 US companies (1994-1995), τ=5 min (Plerou *et.al.*, 1999)

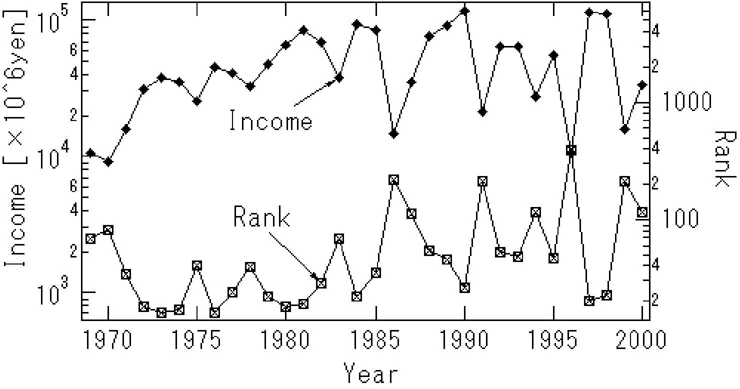
Risikomanagement

- *Optionen*: das *Recht*, zu einem vereinbarten Zeitpunkt eine Aktie zu kaufen (call) oder zu verkaufen (put)
  - Absicherung des Anlegers hat ihren Preis $c(p, t)$
    Calloption auf Aktie mit Kurs p (risikofreier Zinssatz r, Volatilität (Varianz) σ^2)
- Black-Scholes-Formel (1973 – Nobelpreis, 1995):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rc - rp\frac{\partial c}{\partial p} - \frac{1}{2}p^2\sigma^2\frac{\partial^2 c}{\partial p^2}$$

  - Fokker-Planck-Gleichung (Drift, Diffusion)
    Analogie zu Transportgleichungen (Wärmeleitung, ...)
  - Problem: $p(t)$ nicht normalverteilt, keine konstante Varianz

Wachstum von Unternehmen



Takayasu *et. al*, 2004

- "Law of proportionate growth" (Gibrat 1930)

$$\frac{dx_i}{dt} = b_i \, x_i$$

  - $b_i(t)$: Gaußscher Zufallsprozeß, unabhängig von i

- *Wachstums "raten":* $r(t) = x(t+1)/x(t)$
  - $t \gg \Delta t, \;\; \ln(1+b) \approx b$

$$\ln r(t) = \sum_{n=1}^{t} b(n)$$

$\Rightarrow$ Random Walk für $\ln r(t)$

$\Rightarrow$ Log-normal-Verteilung für $x_i(t)$

Empirische Evidenz?

Fig. 2(a)

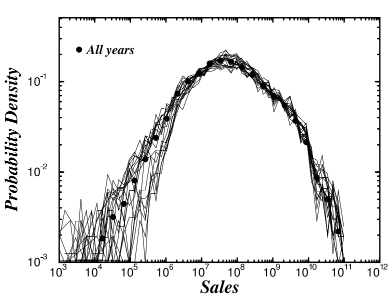
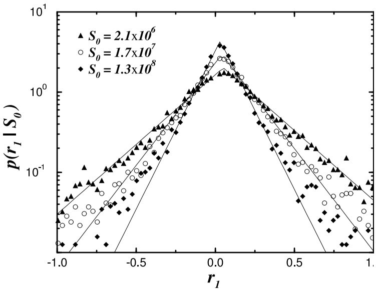


Fig. 3



Empirical distribution of company sizes (1974-1993), L. Amaral *et. al, 1997*

- Unternehmensgröße log-normal verteilt
- jährliche Wachstumsraten sind nicht normal-verteilt ("Brownsche Bewegung"), sondern $\propto e^{-|r-r_0|}$

Das Walten des Zufalls

- Einfluß von Fluktuationen auf unterschiedlichen Skalen
  - *negativ:* begrenzen Meßgenauigkeiten, Sinne (Gehör), beschränken die Vorhersagbarkeit
  - *positiv:* an Strukturbildung beteiligt, "bewegen etwas": Brownsche Teilchen, helfen Auswege finden
- Physik weicher Materie ($k_B T \approx 1$), biologische Physik:
  - Brownsche Teilchen als Sonden zur Bestimmung von Materialeigenschaften über das Fluktuationsspektrum
  - Brownsche Motoren (Ratchets): Entstehung gerichteter Bewegung aus Fluktuationen

- Einstein (1905): Methoden der kinetischen Theorie auf ein breites Spektrum physikalischer Systeme ausdehnen
  - "mikroskopisches" Verständnis der Diffusion, Verbindung zur Wkts.theorie
- ... und heute?
  - breites Anwendungsspektrum der statistischen Physik: Biologie, sozio-ökonomische Systeme
  - statistische Gesetzmäßigkeiten jenseits Brownscher Bewegung Normalverteilung $\Leftrightarrow$ Potenzgesetze
  - Verständnis für kollektive Phänomene, *emergente* Eigenschaften